SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

V. SCORNAZZANI

SULLA REGOLARITA' HÖLDERIANA DEI MINIMI DI CERTI FUNZIONALI

29 GENNAIO 1987

INTRODUZIONE

In questo seminario verrà esposto un risultato di regolarità, e precisamente di Hölderianità, per i minimizzatori di una classe di funzionali del tipo

(1) $$F(u,\Omega) = \int_\Omega F(x,Du)dx$$

$D=(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, $\Omega \subset R^n$ aperto e con F soddisfacente alla condizione

(2) $$M^{-1}w(x)(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 p_j^2)^{m/2} \leq F(x,P) \leq Mw(x)(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 p_j^2)^{m/2}$$

$M>0$, $m>1$, w peso nel senso di Muckenhaupt, e λ_j,$j=1,\dots n$ funzioni non negative che soddisfano le ipotesi più sotto elencate.

Indichiamo con $W'_m(\Omega)$ la chiusura di $Lip(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u;W_m^1(\Omega)\| = (\int_\Omega |u|^m wdx)^{1/m} + (\int_\Omega |\nabla_\lambda u|^m wdx)^{1/m}$$

dove ∇_λ è il gradiente generalizzato $\nabla_\lambda = (\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_j}, \dots, \lambda n \frac{\partial}{\partial x_n})$. Diamo la seguente definizione:

Definizione 1. Diciamo che $u \in W_m^1(\Omega)$ è un minimizzatore per $F(\cdot,\Omega)$ se per ogni $\phi \in W_m^1(\Omega)$, supp $\phi \subset \Omega$, riesce

(3) $$F(u, supp\phi) \leq F(u+\phi, supp\phi)$$

Diamo ora le ipotesi sulle funzioni λ_j e w:

i) $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 \equiv 1$, $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$ $\forall x \in R^n$, $j=1,\ldots,n$

ii) posto $\pi = \{x \in R^n \mid \prod_{k=1}^{n} x_k = 0\}$ allora

$\lambda_j \in C(R^n) \cap C^1(R^n - \pi)$

$0 < \lambda_j(x) \leq \Lambda$, $\forall x \in R^n - \pi$ $\quad j=1,\ldots,n$

$\lambda_j(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_{j-1}) = \lambda_j(x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_{j-1})$

$j = 2,\ldots,n \qquad i = 1,\ldots,j-1$

iii) esistono delle costanti $\rho_{ij} \geq 0$ tali che

$0 \leq x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j(x)) \leq \rho_{ji}\, \lambda_j(x)$

$j = 2,\ldots,n \qquad i = 1,\ldots,j-1.$

Prima di passare a enunciare le proprietà relative alla w, osserviamo che le ipotesi su λ_j consentono di costruire una metrica "naturale" λ per il funzionale, associato coi campi $X_j = \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ $j=1,\ldots,n$ (vedi [FL1], [FL2], [FL3], [NSW]) nel seguente modo:

"Diciamo che una curva $\gamma \subseteq \Omega$ è X-ammissibile se:

i) γ è C' a tratti

ii) ciascun tratto C^1 di γ è una curva integrale di uno dei campi $\pm X_j$ $j=1,\ldots,n$.

Se $\gamma:[0,T] \to \Omega$, poniamo $\ell(\gamma) = T$. Le ipotesi su λ ci permettono di provare che per ogni $x,y \in R$ esiste una curva γ X-ammissibile che congiunge x con y; quindi ha senso definire

$d(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma$ è X-ammissibile e congiunge x con y$\}$.

Una proprietà di questa metrica che verrà utilizzata in seguito è la seguente: "Per ogni sottoinsieme K compatto di Ω esiste $C = C(K)>0$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$(4) \qquad C^{-1}|x-y| \leq d(x,y) \leq C|x-y|^{\varepsilon}$$

avendo indicato con $|\cdot|$ la distanza euclidea (si veda [FL2] pag. 29).

Diamo ora le ipotesi relative alla funzione w:

iii) $w \geq o$ ed esistono $p \in R$, $1<p$, $C = C(w,p) \geq 1$ tali che per ogni d-sfera B_R di raggio R, si abbia

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w dx\right)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} \leq c$$

avendo posto, per $E \subseteq R^n$ misurabile $|E|$ = misura di Lebesgue di E. Porremo anche

$$|w(E)| = \int_E w dx$$

e per $K \in R$

$$B(K,R) = \{x \in B_R \mid u(x)>k\}.$$

Notiamo che $|E| = 0 \Leftrightarrow |W(E)|=0$ (si veda, a questo proposito, [C] Lemma 4) e che la misura $w(x)dx$ vale la proprietà di duplicazione ([FS], Lemma 2.10): "Esiste una costante $\beta = \beta(p,c(w,p),d)$ tale che

$$|w(B,2R)| \leq \beta\, |w(B_R)|$$

per ogni d-sfera di raggio R".

Per quanto riguarda il problema della regolarità dei minimizzatori

dei funzionali di questa classe, notiamo che evidentemente non è possibile rispondere alla questione passando attraverso l'equazione di Eulero, a meno che non si vogliano introdurre delle ipotesi più restrittive di regolarità sulla F, che qui non sono prese in considerazione. Per dimostrare il risultato di questo seminario, utilizziamo la tecnica di Giaquinta-Giusti ([G]), [GG]) e lavoriamo in R^n equipaggiato con la metrica "naturale" d sopra definita e con la misura $w(x)dx$. Introduciamo una classe di funzioni, del tipo De Giorgi, definita facendo uso della metrica su indicata e caratterizzata da una opportuna disuguaglianza, mostrando poi che le funzioni di tale classe sono Hölderiane; a questo punto si farà vedere che a tale classe appartengono i minimizzatori dei funzionali del presente lavoro. I risultati qui ottenuti sono una estensione di quelli ottenuti da Modica ([M]) nel caso $\lambda_j \equiv 1$, $j=1,\dots,n$.

<u>Definizione 2.</u> Diciamo che u appartiene alla classe tipo De Giorgi $DG_m(\lambda,u,\Omega) = DG_m(\Omega)$ se:

i) $u \in W^1_m(\Omega)$

ii) per ogni d-sfera $B_R \subset \Omega$ e per ogni $\rho>0$, $\rho<R$ $K \in R$ si ha:

$$(5) \qquad \int_{B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m \, wdx \le \frac{C}{(R-\rho)^m} \int_{B(K,R)} |u-K|^m \, wdx$$

B_ρ la d-sfera concentrica e B_R e di raggio ρ.

§ 1. Proviamo qui che le funzioni in $DG_m(\Omega)$ sono Hölderiane. A questo scopo viene utilizzato un Teorema di immersione dovuto a Franchi e Serapioni ([FS], T.4.1):

"Sia B_R la d-sfera con centro $\bar{x}$ e raggio R, $u \in W^1_m(\Omega)$, e tale che esista $\beta>0$ per cui $|\{x \in B_R | u(x)=0\}| \ge \beta |B_R|$. Allora esiste $\ell>1$ e $C>0$ tale che:

(6) $$\left(\int_{B_R} |u|^{\ell m} w dx\right)^{1/\ell m} \leq CR|w(B_R)|^{\frac{1-\ell}{m\ell}}\left(\int_{B_R} |\nabla_\lambda u|^m w dx\right)^{1/m}$$

c dipende da $\bar{x}$ e β , ℓ dipende da m, ρ_{ij}, p".

Mediante la (6) proviamo preliminarmente che se $u \in DG_m(\Omega)$ allora u è essenzialmente localmente limitata. Vale infatti:

Teorema 3. Sia $u \in DG_m(\Omega)$, $K \in R$, $0<R<R_0$. Allora per ogni d-sfera $B_R \subset \Omega$, si ha:

(7) $$\sup_{B_{R/2}} u(x) \leq K+C|W(B_R)|^{-\frac{\theta}{m}} \left(\int_{B(K,R)} |u-K|^m w dw\right)^{\frac{1}{m}} \cdot |W(B(K,R))|^{\frac{\theta-1}{m}}$$

dove ℓ è la costante in (6), $\theta = \theta(\ell)>1$ e $C = C(\bar{X})>0$.

Premessa per la dimostrazione, sono due lemmi di natura essenzialmente tecnica.

Lemma 3.1. Sia $0<\rho<R<R_0$, poniamo

$$u(h,\rho) := \int_{R(h,\rho)} |u-K|^m w dx$$

$b(h,\rho) := |w(B(h,\rho))|$; $\phi(h,\rho) := u^{\frac{\ell}{\ell-1}\theta}(h,\rho) b(h,\rho)$

$\theta = \frac{1}{2}\left(1+\left(1+4\,\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$. Per ogni $u \in DG_m(\Omega)$ si ha:

$$\phi(h,\rho) \leq C \frac{R^{m\frac{\ell}{\ell-1}\theta} |W(B_R)|^{-\theta}}{(R-\rho)^{m\frac{\ell}{\ell-1}\theta} |h-k|^m} \phi^\theta(K,R).$$

Dimostrazione. Tale lemma si dimostra essenzialmente utilizzando una funzione cut-off e applicando la disuguaglianza (6) di Franchi e Serapioni e la disuguaglianza di Hölder, secondo la seguente linea.

Sia B_R d-sfera $\subset \Omega$; esiste $y \in C_0^\infty(B_{\frac{R+\rho}{2}})$, $\eta = 1$ in $B\rho$ $0 \leq \eta \leq 1$ e tale che $|\nabla_\lambda \eta| \leq \frac{c}{R-\rho}$ (si veda [FL2] nella prova del Lemma 4.2). Sia $u \in DG_m(\Omega)$ (e dunque $u \in W_m'(\Omega)$); applichiamo la (6) alla funzione $\eta \max(u-K,0)$, e la proprietà di duplicazione, si ha:

$$\left(\int_{B_{\frac{R+\rho}{2}}} |\eta\max(u-k,o)|^{\ell m} wdx\right)^{\frac{1}{\ell m}} \leq cR|w(B_R)|^{\frac{1-\ell}{m\ell}} \left(\int_{B_{\frac{R+\rho}{2}}} |\nabla_\lambda(\eta\max(u-k,o))|^m wdx\right)$$

per un qualche $\ell > 1$.

Dalla disuguaglianza di Hölder

$$\int_{B_\rho} |\max(u-k,o)|^m wdx \leq \left(\int_{B_\rho} |\max(u-k,o)|^{\ell m} wdx\right)^{\frac{1}{\ell}} |w(B(K,\rho))|^{\frac{\ell-1}{\ell}} .$$

Poiché $\rho < \frac{R+\rho}{2} < R$ e $u \in DG_m(\Omega)$

$$\int_{B(K,\rho)} |u-k|^m wdx \leq cR^m |W(B_R)|^{\frac{1-\ell}{\ell}} \int_{B(K,\frac{R+\rho}{2})} |\nabla_\lambda(\eta\max(u-k,o))|^m wdx\, |w(B(K,\rho))|^{\frac{\ell-1}{\ell}} \leq$$

$$\leq CR^m |W(B_R)|^{\frac{1-\ell}{\ell}} \int_{B(K,\frac{R+\rho}{2})} (|u-k|^m |\nabla_\lambda \eta|^m + \eta^m |\nabla_\lambda u|^m) wdx\, |w(B(K,\rho))|^{\frac{\ell-1}{\ell}} \leq$$

$$\leq \frac{CR^m |W(B_R)|^{\frac{1-\ell}{\ell}}}{(R-\rho)^m} \int_{B(K,R)} |u-k|^m wdx|\ w(B(K,\rho))|^{\frac{\ell-1}{\ell}} .$$

Ora, se $h>K$, $0<\rho<R$, abbiamo

$$|h-K|^m |W(B(h,\rho))| \leq \int_{B(h,\rho)} |u-K|^m wdx \leq \int_{B(K,R)} |u-k|^m wdx$$

e poiché $u(h,\rho) \leqq u(K,\rho)$, con le notazioni precedenti:

$$\begin{cases} u(h,\rho) \leq \dfrac{CR^m |W(B_R)|^{\frac{1-\ell}{\ell}}}{(R-\rho)^m} \ u(K,R) b(K,R)^{\frac{\ell-1}{\ell}} \\ b(h,\rho) \leq \dfrac{1}{|h-K|^m} \ u(K,R). \end{cases}$$

Elevando membro a membro le due disuguaglianze per $\xi,\zeta > 0$ e sommando

$$u^\xi(h,\rho) b^{\ \zeta}(h,\rho) \leq \frac{CR^{m\xi} |W(B_r)|^{\frac{1-\ell}{\ell}\xi}}{(R-\rho)^m\ |h-K|^{m\zeta}} \ u^{\xi+\zeta}(K,R) B^{\frac{\ell-1}{2}\xi}(K,R).$$

E' possibile determinare ξ ed ζ in modo che $\xi+\zeta=\theta\xi$, $\frac{\ell-1}{\ell}\xi=\theta\zeta$ (θ è la soluzione positiva dell'equazione $\theta^2-\theta-\frac{\ell-1}{\ell}=0$, cioè $\theta=\frac{1}{2}(1+(1+4\frac{\ell-1}{\ell})^{1/2})>1$). Scegliamo poi $\zeta=1$ e $\xi=\frac{\ell}{\ell-1}\theta$, da cui la tesi.

<u>Lemma 3.2.</u> Per ogni $K \in R$, $R>0$, $R<R_0$, $\sigma \in]0,1[$ risulta

$\phi(K+d,\sigma R) = 0$

con

$$d = \frac{2^{(\frac{\ell}{\ell-1}\theta+1)\frac{\theta}{\theta-1}} c^{\frac{1}{m}} |W(B_R)|^{-\frac{\theta}{m}}}{(1-\sigma)^{\frac{\ell}{\ell-1}\theta}} \phi^{\frac{\theta-1}{m}}(K,R)$$

con c costante che appare nel Lemma 3.1.

Dimostrazione. Si pone per ogni $n \in N$, $h_n = K+d(1-\frac{1}{2^n}) \nearrow K+d$, $\rho_n = \sigma R+(1-\sigma)\frac{R}{2^n} \searrow \sigma R$. Si prova poi per induzione che risulta, per ogni $n \in N$

$$\phi(h_n,\rho_n) \leq \frac{\phi(K,R)}{2^{\frac{m}{\theta-1}(\frac{\ell}{\ell-1}\theta+1)n}}$$

da cui basta fare il limite per $n \to +\infty$, per provare il Lemma.

Prova del Teorema 3. Dal Lemma 3.2, per $\sigma = \frac{1}{2}$ si ha $\phi(K+d, \frac{R}{2})=0$ e quindi $u(K+d, \frac{R}{2})=0$ oppure $b(K+d, \frac{R}{2})=0$, quindi poiché $(\theta-1)\theta\frac{\ell}{\ell-1} = 1$,

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} u(x) \leq K+C|W(B_R)|^{-\frac{\theta}{m}} u^{\frac{1}{m}}(K,R)|W(B(K,R))|^{\frac{\theta-1}{m}}$$

che è la tesi del Teorema. (Il membro a sinistra è l'essenziale sup. secondo la misura di Lebesgue che coincide con l'essenziale sup. secondo la misura w(x)dx in quanto $|E|=0 \Leftrightarrow |w(E)|=0$ come ricordato nell'introduzione), applicando il Teorema a-u si ottiene l'essenziale limitatezza.

Teorema 4. Se u e $-u \in DG_m(\Omega)$ allora u è hölderiana. Premettiamo alla dimostrazione un Lemma:

Lemma 4.1. Posto

$$M(2R) = \sup_{B_{2R}} u(x); \qquad m(2R) = \inf_{B_{2R}} u(x)$$

$$K_o = \frac{1}{2}(M(2R)+m(2R)) \ ; \quad K_\nu = M(2R) - \frac{M(2R)-K_o}{2^\nu}, \qquad \nu \in N$$

se $|B(K_o,R)| \leq \frac{1}{2}|B_R|$ allora si ha:

$$|W(B(K_\nu,R))| \leq \frac{C|W(B_R)|}{\nu^{\ell\,\frac{m-1}{2m}}}$$

Dimostrazione. Sia $h>K>K_o$. Poniamo $v = \min(u,h)-\min(u,K)$. Risulta

$|\{x \in B_R | v(x)=0\}| = |B_R - B(K,R)| = |\{x \in B_R | u(x) \leq K\}| \geq$

$\geq |\{x \in B_R | u(x) \leq K_o\}| \geq \frac{1}{2}|B_R|$ e quindi si può applicare la (6): esiste dunque $\ell>1$, dipendente solo da m, ρ_{ij} e p tale che

$$|h-K|^{\frac{m+1}{2}\ell} |W(B(h,R))| = \int_{B(h,R)} |v|^{\frac{m+1}{2}\ell} wdx \leq \int_{B(K,R)} |v|^{\frac{m+1}{2}\ell} wdx \leq$$

$$\leq \int_{B_R} |v|^{\frac{m+1}{2}\ell} wdx \leq CR^{\frac{m+1}{2}\ell} |W(B_R)|^{1-\ell} \Big(\int_{B_R} |\nabla_\lambda v|^{\frac{m+1}{2}} wdx\Big)^\ell =$$

$$= CR^{\frac{m+1}{2}\ell} |W(B_R)|^{1-\ell} \Big(\int_{B(K,R)-B(h,R)} |\nabla_\lambda u|^{\frac{m+1}{2}} wdx\Big)^\ell ;$$

per la disuguaglianza di Hölder:

$$|h-K|^{\frac{m+1}{2}} |w(B(h,R))|^{\frac{1}{\ell}} \leq CR^{\frac{m+1}{2}} |W(B_R)|^{\frac{1-\ell}{\ell}} \left(\int_{B(K,R)-B(h,R)} |\nabla_\lambda u|^m w dx\right)^{\frac{m+1}{2m}} \cdot$$

$$\cdot\ |w(B(K,R)-B(h,R))|^{\frac{m+1}{2m}} \leq$$

$$\leq CR^{\frac{m+1}{2}} |W(B_R)|^{\frac{1-\ell}{\ell}} \left(\int_{B(K,R)} |\nabla_\lambda u|^m w dx\right)^{\frac{m+1}{2m}} |W(B(K,R)-B(h,R))^{\frac{m-1}{2m}} .$$

Poiché $u \in DG_m(\Omega)$:

$$|h-k|^{m\frac{(m+1)}{m-1}} |W(B(h,R))|^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq$$

$$\leq \frac{CR^{m\frac{(m+1)}{m-1}} |W(B_R)|^{\frac{2m}{m-1}\frac{1-\ell}{\ell}}}{R^{m\frac{m+1}{m-1}}} \left(\int_{B(K,2R)} |u-k|^m w dx\right)^{\frac{m+1}{m-1}} |w(B(K,R)-B(h,R))| .$$

Poniamo in questa disuguaglianza $K = K_{i-1}$, $h \equiv K_i$, quindi, poiché

$K_i - K_{i-1} = \frac{M(2R)-Ko}{2^i}$ e $M-K_{i-1} = \frac{M-Ko}{2^{i-1}}$, abbiamo

$$\frac{(M-K_o)^{m\frac{m+1}{m-1}}}{2^{im\frac{m+1}{m-1}}} |W(B(K_i,R))|^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq$$

$$\leq C|W(B_R)|^{\frac{2m}{m-2}\frac{1-\ell}{\ell}} \frac{(M-K_o)^{m\frac{m+1}{m-1}}}{2^{(i-1)m\frac{m+1}{m-1}}} |W(B(K_{i-1},2R))|^{\frac{m+1}{m-1}} .$$

$$.\ [|w(B(K_{i-1},R))|-|W(B(K_i,R))|].$$

Perciò:

$$|W(B(K_i,R))|^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq C|W(B_R)|^{\frac{2m}{m-1}\frac{1-\ell}{\ell}} |W(B(K_{i-1},2R))|^{\frac{m+1}{m-1}} .$$

$$\cdot\ [|W(B(K_{i-1},R))|-|W(B(K_i,R))] \leq$$

$$\leq C|W(B_R)|^{\frac{2m}{m-1}\ \frac{1-\ell}{\ell}} |w(B_{2R})|^{\frac{m+1}{m-1}} \ [|W(B(K_{i-1},R))|-|W(B(K_i,R))|]$$

e per la proprietà di duplicazione della misura $w(x)dx$:

$$|w(B(K_i,R))|^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq C|W(B_R)|^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} [|W(B(K_{i-1},R))|-|W(B(K_i,R))|].$$

Sommando per $i = 1,2,\ldots,\nu$ e usando l'inclusione $B(K_\nu,R) \subseteq B(K_i,R)$, si ha:

$$\nu|w(B(K_\nu,R))|^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq C|W(B_R)|^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} [|W(B(K_o,R))|-|W(K_\nu,R))|] \leq$$

$$\leq C|W(B_R)|^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} |W(B(K_o,R))|.$$

Cioè:

$$|W(B(K_\nu,R))| \leq \frac{C}{\nu^{\frac{\ell(m-1)}{2m}}} |W(B_R)|^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} |W(B(K_o,R))|^{\frac{\ell(m-1)}{2m}} \leq$$

$$\leq c\ \frac{|W(B_R)|}{\nu^{\frac{\ell(m-1)}{2m}}}$$

che è la tesi.

Dimostrazione del Teorema 4. Si usano le notazioni del Lemma 4.1
Si può supporre $|B(K_0,R)| \leq \frac{1}{2}|B_R|$ perché altrimenti, poiché

$\{x\in B_R | -u_{(x)} > K_0(-u)\} = \{x \in B_R | u(x) < K_0(u)\}$, si può lavorare con $-u$.

Applicando il Teorema 3 con al posto di K

$K_\nu = M(2R) - \frac{1}{2^{\nu+1}}(M(2R) - m(2R))$, si ha:

$$M(\tfrac{R}{2}) \leq K_\nu + C|W(B_R)|^{-\frac{\theta}{m}}\left(\int_{B(K_\nu,R)} |u-K_\nu|^m w dx\right)^{1/m}|W(B(K_\nu,R))|^{\frac{\theta-1}{m}} \leq$$

$$\leq K_\nu + C|w(B_R)|^{-\frac{\theta}{m}}|M(2R)-K_\nu||w(B(K_\nu,R))|^{\frac{\theta}{m}} ;$$

e per il Lemma 4.1, si può scegliere $\bar{\nu} \in N$ tale che

$$C|W(B_R)|^{-\frac{\theta}{m}}|w(B(K_\nu,R))|^{\frac{\theta}{m}} < \frac{1}{2} \text{ ; perciò}$$

$$M(\tfrac{R}{2}) \leq M(2R) - \frac{1}{2^{\bar{\nu}+1}}(M(2R)-m(2R)) + \frac{1}{2}(M(2R)-K_\nu) =$$

$$= M(2R) - \frac{1}{2^{\bar{\nu}+2}}(M(2R)-m(2R));$$

sottraiamo ad entrambi i membri $m(\frac{R}{2})$:

$$M(\tfrac{R}{2})-m(\tfrac{R}{2}) \leq M(2R)- m(\tfrac{R}{2}) - \frac{1}{2^{\bar{\nu}+2}}(M(2R)-m(2R)) \leq$$

$$\leq (M(2R)-m(2R))(1 - \frac{1}{2^{\bar{\nu}+2}})$$

cioè $\omega(\frac{R}{2}) := M(\frac{R}{2})-m(\frac{R}{2}) \leq \beta\omega(2R)$ con $\beta \in]0,1[$, e quindi esiste una costante α tale che $\omega(\rho) \leq c(\frac{\rho}{R})^{\alpha}\ \omega(R)$ e quindi, per la (3), u è hölderiana.

§ 2. Proviamo qui che i minimizzatori sono Hölderiani. Ciò segue dal Teorema 4 e dal seguente

Teorema 5. Sia $u \in W^1_m(\Omega)$ minimizzatore per il funzionale F definito in (1); allora u e $-u \in DG_m(\Omega)$. Premettiamo alla dimostrazione il seguente Lemma (Lemma 1.1 in [GG]):

"Sia $f(t)$ una funzione non negativa definita per $0 \leq T_o \leq t \leq T_1$, supponiamo che per $T_o \leq t < s \leq T_1$ si abbia $f(t) \leq A(s-t)^{-\alpha}+B+\theta f(s)$ con A,B,α,θ non negative e $\theta<1$. Allora esiste una costante C dipendente solo da α e θ tale che per ogni ρ,R, $T_o \leq \rho < R \leq T_1$, si ha:

$$f(\rho) \leq C[A(R-\rho)^{-\alpha}+B]".$$

Passiamo alla dimostrazione del Teorema 5.

Sia B_R la d-sfera di centro $\bar{x} \in \Omega$, tale che $B_R \subset \Omega$; u sia un minimizzatore. Allora

$$\int_{supp\phi} F(x,Du)dx \leq \int_{supp\phi} F(x,D(u+\phi))dx \quad \forall \phi \in W'_m(\Omega),\ supp\phi \subset \Omega$$

Sia ora $\eta \in C^{\infty}_o(B_R)$, $\eta=1$ in B_ρ, $0<\rho<R$ e tale che $|\nabla_\lambda \eta| \leq \frac{c}{R-\rho}$ (si veda [FL2] prova del Lemma 4.2).

Per un fissato $K \in R$, poniamo $\phi = -\eta \max(u-k,o)$. Poichè $B(K,\rho) = \{x \in B_\rho | u(x)>k\} \subseteq supp\phi$, si ha:

$$M^{-1}\int_{B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m w dx \leq M^{-1}\int_{supp\phi} |\nabla_\lambda u|^m w dx \leq \int_{supp\phi} F(x,Du)dx \leq$$

$$\leq \int_{supp\phi} F(x,D(u+\phi))dx \leq M\int_{supp\phi} |\nabla_\lambda (u+\phi)|^m w dx =$$

$$= M\int_{supp\phi} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 |(1-\eta)\frac{\partial u}{\partial x_j} - (u-k)\frac{\partial \eta}{\partial x_j}|^2\right)^{m/2} w dx \leq$$

$$\leq C\int_{supp\phi} (1-\eta)^m |\nabla_\lambda u|^m w dx + C\int_{supp\phi} |u-K|^m |\nabla_\lambda \eta|^m w dx \leq$$

$$\leq C\int_{B(K,R)-B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m w dx + \frac{C}{(R-\rho)^m}\int_{B(K,R)} |u-K|^m wdx$$

in quanto $supp\phi \subseteq \{x \in B_R | u(x) > k\}$ e $\eta=1$ in B_ρ.

In questa disuguaglianza addizionando ad entrambi i membri $C\int_{B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m wdx$, si ha:

$$(M^{-1}+C)\int_{B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m w dx \leq C\int_{B(K,R)} |\nabla_\lambda u|^m w dx + \frac{C}{(R-\rho)^m}\int_{B(K,R)} |u-K|^m wdx.$$

Applicando il Lemma precedentemente ricordato, con

$$f(t) = \int_{B(K,t)} |\nabla_\lambda u|^m w dx \quad , \quad A = \frac{C}{M^{-1}+C}\int_{B(K,R)} |u-K|^m wdx$$

$$B = 0 \quad , \quad \theta = \frac{C}{M^{-1}+C} \quad , \quad \alpha = m \quad , \quad \text{si ha:}$$

$$\int_{B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m w dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^m} \int_{B(K,R)} |u-K|^m \, w dx,$$

cioè $u \in DG_m(\Omega)$.

A questo punto, per provare che anche $-u \in DG_m(\Omega)$ è sufficiente osservare che $-u$ è minimizzatore di $\tilde{F}(v,\Omega) = \int_\Omega \tilde{F}(x,Dv)dx$ con $\tilde{F}(x,Dv) = F(x,D(-v))$ è evidente che $\tilde{F}$ soddisfa le stesse ipotesi di F.

Nota . Più generalmente le argomentazioni precenti valdono anche per i *quasi-minimizzatori* (si veda [G]). Ricordiamo che $u \in W^{'}_m(\Omega)$ è un quasiminimizzatore per il funzionale (1) con costante Q se per tutte le funzioni $\phi \in W^{'}_m(\Omega)$, con $\mathrm{supp}\phi \subset \Omega$, si ha

$$F(u,\mathrm{supp}\phi) \leq QF(u + \phi, \mathrm{supp}\ \phi).$$

BIBLIOGRAFIA

[C] A.P. CALDERON, "Inequalities for the maximal function relative to a metric", Studia Math. 57 (1976).

[DG] E. De GIORGI, "Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari". Mem. Accad. Sci. Torino cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3), 3 (1957).

[FL1] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "Une métrique associé à una classe d'operateurs elliptiques dégénérés", Procedings of the meeting "Linear Partial and Pseudo-Differential Operators, Torino (1982), Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino.

[FL2] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "Hölder regularity Theorem for a class of linear non uniformly elliptic operator with measurable coefficients", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, Vol. X, (1983).

[FL3] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "An embedding Theorem for Sobolev Spaces related to non smoth vector fields and Harnack inequality", Comm. in Partial Differential Equations, Vol. 9 (13) (1984).

[FS] B. FRANCHI, R. SERAPIONI, "Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach", Preprint (1986).

[G] M. GIAQUINTA, "An introduction to the regularity for nonlinear elliptic systems". Mathematik Departement eth Zurich und Forschungsinstitut für Mathematik eth Zürich, 1983/84.

[GG] M. GIAQUINTA, E. GIUSTI, "On the regularity of the minima of variational integrals", Acta, Math. 148 (1982).

[M] G. MODICA, "Quasiminimi di alcuni funzionali degeneri", Ann. Math. Pura Appl. 142 (1985).

[NSW] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER, "Balls and metrics defined by vector field I. Basic properties". Acta Math., 155 (1985).